กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 21 & 12 + 24 \\ 5 + 28 & 6 + 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 36 \end{bmatrix}$$

**4. สื่อและวัสดุอุปกรณ์**

1. สไลด์ เรื่องระบบจำนวน
2. กระดานไวท์บอร์ด ปากกาไวท์บอร์ด

**5. ลำดับขั้นการสอน**

1. ครูผู้สอนบรรยายทฤษฎีพร้อมสื่อการเรียนประกอบ
2. ครูผู้สอนสาธิตในการเรียนภาคปฏิบัติ

**6. การประเมิน**

1. ผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียน
2. ผู้เรียนสามารถปฏิบัติงานได้ตามที่เรียน
3. แบบฝึกหัดหรือการปฏิบัติงาน

**แผนการสอนรายคาบที่ 16**

**รหัสวิชา** 2201 - 2402 **วิชา** คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์ **จำนวน** 3 **หน่วยกิต**

**เรื่อง** เมตริกซ์ ตอนที่ 2 **โดย** ครูฉัตร์มงคล สนพลาย

---

**1. จุดประสงค์การสอน**

1. สามารถนิยามและหาค่าของทรานสโพสของเมตริกซ์ได้
2. สามารถนิยามและหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ได้
3. สามารถนิยามและเข้าใจเกี่ยวกับเมตริกซ์เอกลักษณ์ได้

**2. รายการสอน**

1. การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์(Transpose of a Matrix)
2. ตัวกำหนด (Determinant)
3. เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)

**3. เนื้อหาสาระ**

1. **ดิเทอร์มิเนนต์** เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของเมตริกซ์จัตุรัส และมีเรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริง ดีเทอร์มิเนนต์ของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย $|A|$ หรือ det A หรือ det (A)

2. **ความเป็นเอกฐานของเมตริกซ์** (Singularity of Matrix)

ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส

ถ้า det (A) = 0 จะเรียกเมตริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix)

ถ้า det (A) $\neq$ 0 จะเรียกเมตริกซ์ไม่เอกฐาน (nonSingular Matrix)

3. **การหาดีเทอร์มิเนนต์ของเตริกซ์จัตุรัสที่มีมิติไม่เกิน 3x3**

1. เมตริกซ์ $|x|$

ให้ A = $[a]$ จะได้ det (A) = a

2. เมตริกซ์ 2x2

ให้ A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ det (A) = ad – bc

2. เมตริกซ์ 3x3 ใช้วิธีต่อ 2 หลัก

ให้ A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$

จะได้ det (A) = (aci + bfg + cdh) – (gec + hfa + idb)

4. **ไมเนอร์ , โคแฟกเตอร์ และเมตริกผูกพัน** ( Minor , Cofactor and Adjonint)

กำหนดเมตริกซ์ A = $[a_{ij}]_{mxn}$ โดยที่ n $>$ 1

4.1 ไมเนอร์ของ $a_{ij}$ คือ ดีเทอร์มิเนนต์ของเมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ A ออก เขียนแทนไมเนอร์ $a_{ij}$ ด้วย $M_{ij}$

4.2 โคแฟกเตอร์ของ $a_{ij}$ คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}$

เขียนแทนด้วย $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

4.3 เมตริกผูกพัน (Adjonint Matrix) ของ A คือ ทรานสโพสของเมตริกที่ได้มาจากการแทนที่สมาชิกทุกตัวด้วย โคแฟกเตอร์ของสมาชิกนั้น เขียนแทนด้วย

$\text{adj}(A) = [C_{ij}]^t$

5. **คุณสมบัติที่น่าสนใจในการหา Determinant**

ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัส

1. det (AB) = det (A) det (B)

2. det (A) = det ($A^t$)

3. det (A). det ($A^{-1}$) = 1 เมื่อ A เป็น nonsingular Matrix

4. det ($A^n$) = det $(A)^n$ โดยที่ $n \in I^+$

5. ถ้า A มีสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งเป็น 0 ตลอด แล้ว det (A) = 0

6. ถ้า A มีสมาชิกใน 2 แถวใดๆ หรือ 2 หลักใดๆ เหมือนกันทุกประการ แล้ว det (A) = 0

7. ถ้า A มีสมาชิกแถวใดแถวหนึ่ง ( หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เป็น K เท่าของแถวหนึ่ง (หรืออีกหลักหนึ่ง) แล้ว det (A) = 0

8. ถ้า B มีสมาชิกที่ได้จากการเอาค่าคงที่ K ซึ่ง $k \neq 0$ คูณสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งของ A จะได้ det (B) = Kdet (A)

9. ถ้า A เป็นสมาชิกจัตุรัสมิติ n x n และ B = KA จะได้ว่า det (B) = $K^n$det (A) ในกรณี K = -1 จะได้

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A) = \begin{cases} \det(A) \text{ เมื่อ n เป็นเลขคี่} \\ -\det(A) \text{ เมื่อ n เป็นเลขคู่} \end{cases}$$

10.
$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1+y_1 & c_1+z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

และ
$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

สำหรับเมตริกซ์จัตุรัสมิติอื่นๆ สูตรก็จะเป็นไปในทำนองเดียวกัน

11. ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากการสลับสองแถว ( หรือสองหลักใดๆ) ของ A แล้วจะได้ det (B) = -det (A)

12. จาก A ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด n x n ถ้ามีการเปลี่ยนสมาชิกในแถวที่ i (หรือ หลักที่ j ) โดยเอา K คูณสมาชิกในหลักที่ j โดยที่ $i \neq j$ แล้วสมารถบวกกับ

สมาชิกของแถวที่ i จะได้ ดีเทอร์มิเนนต์ เท่าเดิมเสมอ คุณสมบัติข้อนี้มีประโยชน์ในการหาดิเทอร์มิเนนต์ของเมตริกซ์ชนิดต่างๆ

13. ดิเทอร์มิเนนต์ของเมตริกซ์ A มิติ n x n หาได้จากการกระจายโคแฟกเตอร์

1. กระจายโคแฟกเตอร์ในแถวที่ i

$\det(A) = a_{ij1}.C_{ij1} + a_{ij2}.C_{ij2} + a_{ij3}.C_{ij3} + \ldots + a_{ni}.C_{ni}$

2. กระจายโคแฟกเตอร์ในหลักที่ j

$\det(A) = a_{ij1}.C_{ij1} + a_{ij2}.C_{ij2} + a_{ij3}.C_{ij3} + \ldots + a_{nj}.C_{nj}$

14. $A\,adj(A) = adj(A).A = \det(A).I_n$

**อินเวอร์สของเมตริกซ์**

**1. เงื่อนไขที่จะมีอินเวอร์สการคูณ**

สำหรับจัตุรัส A ใด ๆ จะสามารถหาอินเวอรส์การคูณของ A ได้ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$

**2. การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์**

1. เมตริกซ์ $|x|$

ถ้า $A = [a]$ และ $a \neq 0$ จะได้ $A^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)$

2. เมตริกซ์ 2x2

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

3. สำหรับเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่เป็น nonsingular Matrix สามารถหาอินเวอร์สได้

จากสูตร

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,adj(A)$

**3. คุณสมบัติของอินเวอร์สเมตริกซ์**

กำหนด A และ B เป็น nonsingular Matrix มิติเดียวกัน

1. $\det (A^{-1})^{-1} = A$

2. $\det (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

3. $\det (A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$

4. $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$ เมื่อ $n \in I^{+}$

5. $(KA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ โดยที่ $K \neq 0$

**4. สื่อและวัสดุอุปกรณ์**

1. สไลด์ เรื่องระบบจำนวน
2. กระดานไวท์บอร์ด ปากกาไวท์บอร์ด

**5. ลำดับขั้นการสอน**

1. ครูผู้สอนบรรยายทฤษฎีพร้อมสื่อการเรียนประกอบ
2. ครูผู้สอนสาธิตในการเรียนภาคปฏิบัติ

**6. การประเมิน**

1. ผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียน
2. ผู้เรียนสามารถปฏิบัติงานได้ตามที่เรียน
3. แบบฝึกหัดหรือการปฏิบัติงาน

## แผนการสอนรายคาบที่ 17

**รหัสวิชา** 2201 - 2402 **วิชา** คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์ **จำนวน** 3 **หน่วยกิต**

**เรื่อง** พีชคณิตเชิง ตอนที่ 1 **โดย** ครูฉัตร์มงคล สนพลาย

---

**1. จุดประสงค์การสอน**

1. สามารถบอกความหมายของสมการ ตัวแปร ค่าคงที่ และสัมประสิทธิ์ได้
2. สามารถทราบระบบสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
3. สามารถแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้
4. สามารถแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูปของเศษส่วนได้

**2. รายการสอน**

1. ความหมายของสมการ ตัวแปร ค่าคงที่ และสัมประสิทธิ์
2. ระบบสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
3. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
4. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูปของเศษส่วน

**3. เนื้อหาสาระ**

**สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว** คือ สมการที่มีตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่า (Unknown) หนึ่งตัวและเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็น 1 โดยตัวแปรสามารถปรากฏเพียงข้างใดข้างหนึ่งของเครื่องหมาย " = " หรือปรากฏทั้งสองข้างแต่เมื่อจัดให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะมีรูปสมการเป็น

$$\boxed{ax + b = 0}$$